

## برآورد توزیع سرعت در کانال‌های مرکب فاضلاب و تنگ با استفاده از تئوری آنتروپی

رسول دانشفراز<sup>۱\*</sup>، مرجان معظم‌نیا<sup>۲</sup> و سینا صادق‌فام<sup>۳</sup>

۱- به‌ترتیب: دانشیار؛ و استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

۲- دانشجوی دکتری عمران، مدیریت منابع آب، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ دریافت: ۹۵/۱۰/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۹۶/۹/۱۱

### چکیده

برآورد توزیع سرعت جریان از مباحث مهم در هیدرولیک جریان کانال‌های روباز، فاضلاب‌روها و رودخانه‌هاست. وجود پدیده سرعت حداکثر زیر سطح آب (پدیده دیپ)، برآورد توزیع سرعت را در جریان‌های روباز با پیچیدگی‌هایی مواجه می‌کند. در این مقاله توزیع سرعت در کانال‌های مرکب فاضلاب و تنگ، با استفاده از تئوری آنتروپی برآورد و تأثیر توابع توزیع جمععی مختلف بر منحنی‌های توزیع سرعت بررسی شده است. مقایسه نتایج دو تابع آنتروپی چپو و مارینی در برآورد توزیع سرعت و تخمین پارامترها نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی دقت بالاتری ارائه داده است. همچنین، مقایسه داده‌های میدانی تحقیقات گذشته با نتایج مدل پیشنهادی نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی در ترازها و مقاطع عرضی مختلف تطابق مناسبی با داده‌های میدانی دارد. نتایج بررسی‌ها بیانگر دقت قابل قبول مدل پیشنهادی در برآورد توزیع سرعت ( $R^2$  برابر  $0/86$ ، خطای نسبی برابر  $11$  درصد،  $RMSE$  برابر  $0/0758$  و  $MAPE$  برابر  $7/84$  درصد) است. همچنین، مقایسه این مدل با مدل توزیع سرعت چپو نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی علاوه بر اینکه نسبت به مدل‌های موجود ساده‌تر است، محدودیت‌های مدل‌های پیشین را ندارد و عملکرد بهتری نیز نشان می‌دهد.

### واژه‌های کلیدی

تئوری آنتروپی، توزیع سرعت، پدیده دیپ، کانال فاضلاب و تنگ

### مقدمه

جریان کمتر از ۵ باشد، قانون لگاریتمی قادر به محاسبه توزیع سرعت نیست. در این شرایط، سرعت حداکثر در نقطه‌ای پایین‌تر از سطح آزاد آب رخ می‌دهد (پدیده دیپ) و قوانین توزیع سرعت لگاریتمی و توانی نمی‌تواند این پدیده را در این کانال‌ها پیش‌بینی کند. با این حال، برخی از محققان با اعمال تصحیحاتی در قوانین توزیع سرعت لگاریتمی موفق به مدل‌سازی پدیده دیپ در کانال‌های باز شده‌اند (Guo & Julien, 2006). اما این قانون نیازمند انطباق سرعت‌های سطح آزاد به قانون سهمی برای به‌دست آوردن موقعیت دیپ و سرعت حداکثر است.

برآورد سریع و دقیق جریان عبوری در بسیاری از کاربردهای مهندسی مانند طراحی مقطع عرضی کانال، طراحی کانال و ساختارهای رودخانه، تحلیل رسوب، دبی عبوری، توزیع تنش برشی و انتقال آلودگی بسیار مهم است. از این رو بررسی‌ها در زمینه برآورد نیم‌مرخ سرعت طولی جریان در مقاطع عرضی کانال‌ها، سال‌ها مورد توجه پژوهشگران بوده است. قانون لگاریتمی در کانال‌های عریض توزیع سرعت طولی را در عمق جریان به‌خوبی توصیف می‌کند. اما مطالعات نشان می‌دهد زمانی که نسبت عرض به عمق

معادلات دیفرانسیلی باشد. مقدار صفر روی کناره‌ها و مقدار یک فقط در یک نقطه اختصاص می‌یابد که سرعت حداکثر رخ می‌دهد. برای ساده‌سازی بیشتر، کوی و کوی و سینگ (Cui, 2011; Cui & Singh, 2012) یک سیستم مختصات جدید را تنظیم کرده‌اند. مقاطع کانال طبیعی اغلب  $u$  شکل و  $v$  شکل هستند. برای سادگی، مقطع عرضی کانال ایده‌آل‌سازی شده به صورت یک مستطیل با عمق  $D$  و عرض  $2B$  است. همچنین فرض شده است که توزیع سرعت روی هر یک از دو طرف خط مرکزی قائم، متقارن است.

در داخل کشور نیز در زمینه پیش‌بینی سطح آب با استفاده از تئوری آنتروپی، مطالعاتی شده است. فرسادی‌زاده و همکاران (Farsadizadeh *et al.*, 2011) تئوری آنتروپی شانون و برنامه‌ریزی ژنتیک را در محاسبه نیم‌رخ سرعت جریان در کانال‌های باز بررسی کرده‌اند. نتایج مطالعات این محققان نشان می‌دهد که روش آنتروپی و برنامه‌ریزی ژنتیک با داشتن کمترین خطای محاسباتی، بهترین روش توزیع سرعت در کانال‌های باز با بستر صاف هستند. در مطالعات معظم‌نیا و بنکداری (Moazamnia & Bonakdari, 2014)، محاسبه سرعت در کانال مرکب، تعیین رابطه خطی بین سرعت‌های متوسط و بیشینه و ارزیابی دبی توسط آنتروپی شانون بررسی شده است. اسمعیلی‌ورکی و همکاران (Esmaeili-Varaki *et al.*, 2013) با استفاده از اصل بیشینه آنتروپی و رابطه توزیع سرعت چیو، توزیع سرعت و دبی جریان را در چندین مقطع از رودخانه پسیخان، در استان گیلان طی سال‌های ۱۳۸۹-۱۳۹۰، برآورد کرده‌اند.

در این مطالعه، یک مدل اصلاح شده برای برآورد توزیع سرعت در کانال‌های فاضلاب‌رو با استفاده از مفهوم آنتروپی تسالیس ارائه شده است. در این مدل، برای نخستین بار از تابع توزیع تجمعی چیو در مدل توزیع سرعت آنتروپی تسالیس در کانال‌های فاضلاب‌رو استفاده

در چنین کانال‌هایی، تأثیر شرایط غیرایزوتروپی آشفتگی با اهمیت است و جریان‌های ثانویه تیپ دو پرانتل در مقطع وجود دارد. در حقیقت، حرکت ثانویه ضعیف در مقطع عرضی و انتقال مومنتم ناشی از آن از طرف دیواره‌های کناری کانال به سمت مرکز کانال سبب می‌شود تا حداکثر سرعت طولی در پایین‌تر از سطح آزاد آب اتفاق افتد.

اشکالات روش‌های کلاسیک، باعث توسعه مدل‌های ریاضی بر مبنای تئوری آنتروپی برای به‌دست آوردن توزیع سرعت متوسط زمانی شده است. با فرض سرعت متوسط زمانی به‌عنوان یک متغیر تصادفی، توزیع‌های سرعت یک‌بعدی و دوبعدی در کانال‌های روباز از طریق بیشینه‌سازی آنتروپی شانون را چیو (Chiu, 1987; 1988; 1991) و آنتروپی تسالیس را لو و لو و سینگ (Luo, 2009; Luo & Singh, 2011) و بنکداری و معظم‌نیا (Bonakdari & Moazamnia, 2015) به‌دست آورده‌اند. برای توصیف توزیع سرعت طولی در هر دو جهت عرضی و قائم، فرضیات دوبعدی بر توزیع احتمالی باید در نظر گرفته شود. برای رسیدن به این هدف، یک سیستم مختصات جدید دارای انحنا ( $\xi-\eta$ ) را چیو و لین (Chiu & Lin, 1983) به‌صورت خطوط هم‌سرعت از جریان اولیه و مسیر قائم آنها تشکیل داده‌اند. لو و سینگ (Luo & Singh, 2011) همان سیستم مختصات را برای توسعه توزیع سرعت دوبعدی با استفاده از آنتروپی تسالیس به‌کار برده و نتایج به‌دست آمده از بررسی‌های خود را با نتایج به‌دست آمده از بررسی‌های چیو مقایسه کرده‌اند. برای کاهش بسیاری از پارامترها در این سیستم مختصات، مارینی و همکاران (Marini *et al.*, 2011) روشی جدید برای توزیع سرعت دوبعدی توسعه داده‌اند. در مطالعات آنها تابع توزیع تجمعی تحت سیستم مختصات  $x-y$  فرض شده است. تابع توزیع تجمعی نیازمند آن است که بین صفر و یک قرار گیرد و به‌صورت پیوسته و از نوع

برآورد توزیع سرعت در کانال‌های مرکب...

$$H = \frac{1}{m-1} \left\{ 1 - \int_0^{u_{\max}} [f(u)]^m du \right\} = \frac{1}{m-1} \int_0^{u_{\max}} f(u) \{1 - [f(u)]^{m-1}\} du \quad (2)$$

که در آن،

$U$  = میزان سرعت در نقطه مورد نظر؛  $u_{\max}$  = سرعت حداکثر در مقطع عرضی؛  $f(u)$  = تابع چگالی احتمال؛ و  $m$  یک عدد حقیقی است و هنگامی که  $m > 0$  باشد، آنتروپی یک تابع صعودی می‌شود.

رابطه ۲ میزان عدم قطعیت توزیع سرعت  $U$  را در مقطع عرضی یا تابع چگالی احتمال آن  $f(u)$  بیان می‌کند. مشابه با آنتروپی شانون، آنتروپی تسالیس می‌تواند با اصل آنتروپی حداکثر برای رسیدن به توزیع احتمال یک متغیر تصادفی مفروض ترکیب شود و امکان تولید نتایج دقیق‌تری از آنتروپی شانون را در بسیاری از موارد فراهم کند.

بر اساس اصل آنتروپی حداکثر، توزیع احتمال با تئوری آنتروپی هنگامی می‌تواند به دست آید که آنتروپی بیشینه شود. برای این منظور، جینز (Jaynes, 1957) اصل آنتروپی حداکثر را فرمول‌سازی کرد. تابع چگالی احتمال با بیشینه‌سازی عدم قطعیت بیان شده توسط آنتروپی، تحت محدودیت‌های مفروض می‌تواند به دست آید. به عبارت دیگر، مناسب‌ترین توزیع احتمال تحت محدودیت‌های مفروض، به بیشترین آنتروپی یا عدم قطعیت اختصاص یافته است. بر این اساس، توزیع احتمال سرعت تحت محدودیت‌های معین باید طوری به دست آید که عدم قطعیت داده شده توسط آنتروپی را به حداکثر برساند.

جریان در یک کانال قوانین بقای جرم، مومنتم و انرژی را اغنا می‌کند و این قوانین می‌توانند برای تعریف محدودیت‌هایی به کار روند که در توزیع سرعت در نظر گرفته شوند. بنابراین، محدودیت‌ها به شرح زیر تعریف می‌شوند. گفتنی است که انتگرال‌گیری از تابع

شده است. این مدل می‌تواند توزیع سرعت را از کف کانال تا سطح آزاد برآورد کند و وقوع پدیده دیپ را در این نوع از کانال‌ها به طور واضح نشان دهد.

## مواد و روش‌ها

### تئوری آنتروپی

شانون (Shannon, 1948) مفهوم تئوری را به‌عنوان اطلاعات قابل اندازه‌گیری یا عدم قطعیت همراه با متغیر تصادفی یا توزیع احتمال آن فرمول‌سازی کرده است. آنتروپی به‌عنوان مشخصات سودمند از هر توزیع احتمال می‌تواند در نظر گرفته شود و به طور گسترده در مهندسی محیط زیست و آب، شامل زمین‌شناسی، هیدرولوژی و هیدرولیک اعمال شود.

بر اساس نظریه اطلاعات<sup>۱</sup> شانون یک اندازه‌گیری کمی عدم قطعیت همراه با یک توزیع احتمال متغیر تصادفی در ترم‌های آنتروپی تعریف می‌کند که آنتروپی شانون ( $H$ ) نامیده شده و اطلاعات آنتروپی برای یک متغیر پیوسته به صورت رابطه ۱ بیان می‌شود (Shannon, 1948):

$$H = -\int_0^{\infty} f(x) \ln f(x) dx \quad (1)$$

که در آن،

$x$  = تابع چگالی احتمال پیوسته از متغیر تصادفی  $X$ . آنتروپی شانون همراه با اصل آنتروپی حداکثر که در بخش بعدی معرفی خواهد شد، برای تعیین توزیع احتمال متغیر تصادفی مفروض می‌تواند به کار رود.

تسالیس (Tsallis, 1988) یک شکل کلی از آنتروپی شانون را با در نظرگیری سرعت متوسط زمانی به صورت متغیر تصادفی  $U$  در یک مقطع عرضی کانال، بر اساس تابع چگالی احتمال سرعت  $f(u)$ ، به صورت رابطه ۲ پیشنهاد داده است:

تسالیس بیان شده با رابطه ۲ به صورت روابط ۷ و ۸ پیشینه می‌شود (Luo, 2009):

$$L = \int_0^{u_{\max}} \frac{f(u)}{m-1} \{1 - [f(u)]^{m-1}\} du + \lambda_0 \left( \int_0^{u_{\max}} f(u) du - 1 \right) + \lambda_1 \left( \int_0^{u_{\max}} u f(u) du - \bar{u} \right) + \lambda_2 \left( \int_0^{u_{\max}} u^2 f(u) du - \beta \bar{u}^2 \right) + \lambda_3 \left( \int_0^{u_{\max}} u^3 f(u) du - \alpha \bar{u}^3 \right) \quad (7)$$

$$L = \int_0^{u_{\max}} f(u) \left\{ \frac{1 - [f(u)]^{m-1}}{m-1} + \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3 \right\} du - (\lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3) \quad (8)$$

که در آنها،

$u$  = مقدار سرعت در نقطه‌ای مشخص؛  $u_{\max}$  = سرعت حداکثر مقطع عرضی؛  $\bar{u}$  = سرعت متوسط؛  $f(u)$  = تابع چگالی احتمال؛  $m$  = یک عدد حقیقی؛ و  $\lambda_i$  ها ضرایب لاگرانژ هستند.

با در نظر گرفتن  $\frac{\partial L}{\partial f(u)}$  و مساوی صفر قرار دادن آن، تابع چگالی احتمال  $f(u)$  به صورت روابط ۹ و ۱۰ به دست می‌آید (Luo, 2009):

$$f(u) = \left[ \frac{m-1}{m} \left\{ \frac{1}{m-1} + (\lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3) \right\} \right]^{\frac{1}{m-1}} \quad (9)$$

$$\lambda_0 = \lambda_0 + \frac{1}{m-1} \Rightarrow f(u) = \left[ \frac{m-1}{m} \left\{ \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3 \right\} \right]^{\frac{1}{m-1}} \quad (10)$$

رابطه ۱۰ به عنوان توزیع احتمال حداقل توان تعریف می‌شود که رابطه‌های ۳ تا ۶ را اغنا می‌کند و بر مبنای آنتروپی تسالیس است. در رابطه توزیع سرعت به دست آمده چيو (Chiu, 1987; 1989) فقط دو محدودیت استفاده شده که با رابطه‌های ذکر شده اول و دوم یکسان هستند. بارب (Barbe, 1990) توزیع سرعت بر مبنای

چگالی احتمال سرعت باید همیشه برابر مقدار واحد باشد. بنابراین، اولین محدودیت به صورت رابطه ۳ بیان می‌شود (Luo, 2009):

$$C_1 = \int_0^{u_{\max}} f(u) du = 1 \quad (3)$$

دومین محدودیت  $C_2$  با استفاده از بقای جرم به دست می‌آید (Luo, 2009):

$$C_2 = \int_0^{u_{\max}} u f(u) du = \bar{u} \quad (4)$$

که در آن،

$\bar{u}$  = سرعت متوسط مقطع عرضی یا  $Q/A$  و  $Q$  دبی گذرنده از سطح مقطع عرضی  $A$  محدودیت سوم  $C_3$  از بقای مومنتم به دست می‌آید (رابطه ۵) (Luo, 2009):

$$C_3 = \int_0^{u_{\max}} u^2 f(u) du = \beta \bar{u}^2 \quad (5)$$

که در آن،

$\beta$  = ضریب توزیع مومنتم.

محدودیت چهارم  $C_4$  از بقای انرژی به دست می‌آید (Luo, 2009):

$$C_4 = \int_0^{u_{\max}} u^3 f(u) du = \alpha \bar{u}^3 \quad (6)$$

که در آن،

$\alpha$  = ضریب توزیع انرژی. تابع چگالی احتمال و مدل دوبعدی توزیع سرعت بر اساس آنتروپی تسالیس هدف اصلی تعیین تابع چگالی احتمال  $f(u)$  است که با پیشینه‌سازی آنتروپی تسالیس کامل می‌شود. با استفاده از اصل آنتروپی حداکثر و محدودیت‌های اعمال شده در روابط ۳ تا ۶ توسط ضرایب لاگرانژ برای  $m > 0$  آنتروپی

محاسبه مشتق‌های جزئی  $K$  نسبت به  $z$  و  $y$  به صورت روابط ۱۴ و ۱۵ است (Cui & Singh, 2012):

$$\frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = \lambda_1 \left[ \frac{m-1}{m} (\lambda_* + \lambda_1 u) \right]^{\frac{1}{m-1}} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (15)$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_1 \left[ \frac{m-1}{m} (\lambda_* + \lambda_1 u) \right]^{\frac{1}{m-1}} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

با مقایسه روابط ۱۵ و ۱۶ با روابط ۱۲ و ۱۳، رابطه بین  $F(u)$  و  $K$  می‌تواند به صورت زیر به دست آید (Cui & Singh, 2012):

$$\frac{\partial K}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial F(u)}{\partial z} \quad (17)$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial F(u)}{\partial y} \quad (18)$$

رابطه‌های ۱۷ و ۱۸ به صورت یک سیستم رابطه‌های دیفرانسیل خطی هستند که با استفاده از قانون لایبیتز<sup>۱</sup> می‌توانند حل شوند (Cui & Singh, 2012):

$$\int_{(0,0)}^{(z,y)} \left( \frac{\partial K}{\partial z} dz + \frac{\partial K}{\partial y} dy \right) = K(z, y) - K(0,0) \quad (19)$$

نقطه‌ای که با مختصات  $(0,0)$  بر کف کانال قرار گرفته است، سرعت  $u=0$  را دارد.  $K(0,0)$  در سمت راست رابطه ۱۹ معادل  $K = \left[ \frac{m-1}{m} (\lambda_*) \right]^{\frac{m}{m-1}}$  از رابطه ۱۴ است. از این رو، سمت راست رابطه ۱۹ به صورت رابطه ۲۰ است (Cui & Singh, 2012):

آنتروپی با سه محدودیت را به کار برد. در مطالعات آنان، علاوه بر بقای جرم و انرژی، ترم‌های بقای مومنتم نیز اضافه شده بود. نتایج مطالعات دو گروه فوق نشان می‌دهد که نیمرخ سرعت موجود با سه محدودیت، انطباق کافی در سراسر نیمرخ سرعت را فراهم نمی‌کند. در حالی که بیشترین اصلاح نزدیک کف کانال است و دو محدودیت برای توصیف دقیق توزیع سرعت کافی خواهد بود. از این رو در این مطالعه، دو محدودیت اول اعمال و تابع چگالی احتمال به صورت رابطه ۱۱ حاصل می‌شود (Luo, 2009):

$$f(u) = \left[ \frac{m-1}{m} (\lambda_* + \lambda_1 u) \right]^{\frac{1}{m-1}} \quad (11)$$

با در نظر گرفتن تابع چگالی در دامنه دوبعدی  $(z, y)$ ، که در آن  $y$  عمق را از کف کانال و  $z$  فاصله عرضی را از خط مرکزی نشان می‌دهد، مشتق‌گیری جزئی  $F(u)$  نسبت به  $z$  و  $y$ ، روابط ۱۲ و ۱۳ را نتیجه می‌دهد (Cui & Singh, 2012):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(u)}{\partial z} &= \frac{\partial F(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = f(u) \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \left[ \frac{m-1}{m} (\lambda_* + \lambda_1 u) \right]^{\frac{1}{m-1}} \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(u)}{\partial y} &= \frac{\partial F(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = f(u) \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \left[ \frac{m-1}{m} (\lambda_* + \lambda_1 u) \right]^{\frac{1}{m-1}} \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (13)$$

با تعریف متغیری جدید، که به صورت رابطه ۱۴ است، معادلات ساده می‌شوند (Cui & Singh, 2012):

$$K = \left[ \frac{m-1}{m} (\lambda_* + \lambda_1 u) \right]^{\frac{m}{m-1}} \quad (14)$$

به دست می‌آید (Cui & Singh, 2012):

$$u = -\frac{\lambda_*}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{m}{m-1} \left[ \lambda_1 F(u) + \left( \frac{m-1}{m} \lambda_* \right)^{\frac{m}{m-1}} \right]^{\frac{m-1}{m}} \quad (24)$$

در این بررسی، توزیع سرعت در دو حالت یک‌بعدی و دوبعدی با رابطه ۲۴ به دست آمده است. توزیع سرعت بیان شده با رابطه ۲۴ شامل ۳ پارامتر  $m$ ،  $\lambda_*$  و  $\lambda_1$  است. پارامتر  $m$  مقدار حقیقی است و در بازه ۱ تا ۵ قرار می‌گیرد. بر اساس مطالعات مبتنی بر داده‌های میدانی برای مقدار ثابت  $m=2$ ، رابطه توزیع سرعت بهترین انطباق را با داده‌ها دارد (Luo, 2009). گفتنی است که پارامترهای  $\lambda_1$  و  $\lambda_*$  ضرایب لاگرانژ هستند. بنابراین، رابطه توزیع سرعت به صورت رابطه ۲۵ به دست می‌آید:

$$u = -\frac{\lambda_*}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1} \left[ \lambda_1 F(u) + \frac{1}{4} (\lambda_*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

که در آن،

$$F(u) = \text{تابع توزیع تجمعی.}$$

تابع چگالی احتمال (رابطه ۱۱)، دو پارامتر  $\lambda_*$  و  $\lambda_1$  دارد که می‌تواند از یک سیستم غیرخطی شامل دو محدودیت محاسبه شود. با جایگذاری تابع چگالی احتمال، در معادلات محدودیت‌ها (روابط ۳ و ۴) و انتگرال‌گیری و سپس جایگذاری  $m=2$ ، پارامترهای  $\lambda_*$  و  $\lambda_1$  به صورت روابط ۲۶ و ۲۷ به دست می‌آیند:

$$\lambda_1 = -\frac{12}{u_{\max}^3} (u_{\max} - 2\bar{u}) \quad (26)$$

$$\lambda_* = \frac{4 - \lambda_1 u_{\max}^2}{2u_{\max}} \quad (27)$$

$$K(z, y) - K(0, 0) = K(z, y) - \left[ \frac{m-1}{m} (\lambda_*)^{\frac{m}{m-1}} \right]^{\frac{m}{m-1}} \quad (20)$$

انتگرال‌گیری از سمت چپ رابطه ۲۰ می‌تواند در یک نقطه کلی با مختصات  $(\bar{z}, \bar{y})$  محاسبه شود. حاصل این انتگرال می‌تواند با یک منحنی چند گوشه محاسبه شود که از مبدأ محورها  $(0, 0)$  شروع می‌شود و از نقطه  $(\bar{z}, 0)$  می‌گذرد و در  $(\bar{z}, \bar{y})$  به انتها می‌رسد. تابع توزیع تجمعی  $F(u)$  در نقطه  $(0, 0)$  تا  $(\bar{z}, 0)$  ثابت صفر است. بنابراین، با استفاده از رابطه‌های ۱۷ و ۱۸ و انتگرال‌گیری از رابطه ۲۰ می‌توان این گونه نتیجه گرفت (Cui & Singh, 2012) (رابطه ۲۱):

$$\int_{(0,0)}^{(\bar{z}, \bar{y})} \lambda_1 \frac{\partial F(u)}{\partial z} dz + \lambda_1 \frac{\partial F(u)}{\partial y} dy = \int_0^{\bar{y}} \lambda_1 \frac{\partial F(u)}{\partial y} dy = \lambda_1 F(u) \quad (21)$$

با ترکیب رابطه ۲۱ با رابطه ۲۰ می‌توان رابطه ۲۲ را نوشت (Cui & Singh, 2012):

$$\int_{(0,0)}^{(z,y)} \lambda_1 \frac{\partial k}{\partial z} dz + \lambda_1 \frac{\partial k}{\partial y} dy = \int_0^{\bar{y}} \lambda_1 \frac{\partial F(u)}{\partial y} dz = \lambda_1 \frac{\partial F(u)}{\partial y} dy \quad (22)$$

از این‌رو،  $K(z, y)$  می‌تواند به صورت رابطه ۲۳ به دست آید (Cui & Singh, 2012):

$$K(z, y) = \lambda_1 F(u) + \left[ \frac{m-1}{m} (\lambda_*)^{\frac{m}{m-1}} \right]^{\frac{m}{m-1}} \quad (23)$$

با جایگذاری  $K$  از رابطه ۲۳ در رابطه ۱۴، تابع توزیع سرعت با استفاده از آنتروپی تسالیس به صورت رابطه ۲۴

که در آن،  $F(u)$  تابع توزیع تجمعی است که به صورت  $\xi/\xi_{\max}$  تعریف می‌شود و کسری از مساحت مقطع عرضی کانال است که سرعت در آن ناحیه، برابر با یا کمتر از  $u$  است. رابطه‌های ۲۹ و ۳۰ را چيو و چيوو (Chiu & Chiu, 1986) پیشنهاد داده‌اند که منحنی خطوط هم‌سرعت را نشان می‌دهند:

$$\xi = Y(1-Z)^{\beta_i} \exp(\beta_i Z - Y + 1) \quad (29)$$

$$Z = \frac{|Z|}{\beta_i + \delta_i} \quad Y = \frac{y + \delta_y}{D + \delta_y + h} \quad (30)$$

که در آن،  $\beta_i$  (معادل ۱ یا ۲) = فاصله عرضی روی سطح آب بین محور  $y$  و سمت چپ یا راست مقطع عرضی کانال؛  $Z$  = مؤلفه سیستم مختصات در جهت عرضی؛  $y$  = مؤلفه سیستم مختصات در جهت قائم (محور  $y$  از محل وقوع سرعت حداکثر عبور می‌کند)؛  $h$ ،  $\delta_i$ ،  $\delta_y$  و  $\beta_i$  = ضرایبی که هندسه منحنی خطوط هم‌سرعت را توصیف می‌کنند.

ضریب  $h$  ابزاری است برای شکل‌دهی الگوی منحنی خطوط هم‌سرعت و ممکن است از  $-D$  تا  $+\infty$  تغییر کند. این ضریب اگر بزرگتر از صفر باشد، معنی فیزیکی خاصی ندارد. اگر  $h$  کمتر یا برابر صفر باشد (بین  $-D$  و صفر)، بزرگی  $|h|$  عمق واقعی سرعت حداکثر زیر سطح آب را نشان می‌دهد (شکل ۱).

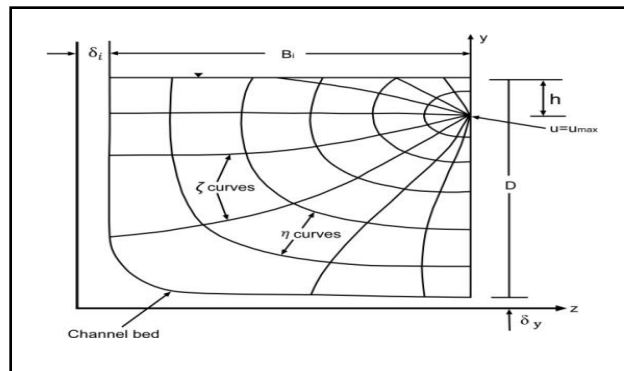
با در نظر گرفتن مقادیر معلوم برای  $u_{\max}$  و  $\bar{u}$  و جایگذاری آنها در رابطه‌های ۲۶ و ۲۷، ضرایب لاگرانژ به دست می‌آیند.

یادآوری می‌شود که مدل توزیع سرعت بدون در نظر گرفتن شکل هندسی مقطع عرضی با استفاده از مفهوم آنتروپی به دست می‌آید که می‌تواند تغییرات سرعت را در جهت‌های قائم و عرضی توصیف کند که در کانال‌های فاضلاب رو واقعی به شدت پیچیده است (Bonakdari, 2011). این روش در تمامی کانال‌ها با هندسه‌های متفاوت و در نواحی مختلف جریان یعنی کف، سطح و نواحی میانی جوابگوست. از جمله برتری‌های مدل توزیع سرعت پیشنهادی می‌توان به قابلیت شناسایی پدیده دیپ در مقاطع عرضی و سطوح مختلف جریان آب و همچنین به پایین بودن عدم قطعیت در مناطق مختلف کانال برای برآورد توزیع سرعت اشاره کرد. بنابراین، اثر شکل مقطع در مدل پیشنهادی توسط ضریب تابع توزیع تجمعی در عرض‌ها و ترازهای مختلف لحاظ می‌گردد.

### تابع توزیع تجمعی

با استفاده از اصل شبیه‌سازی مونت‌کارلو، احتمال وقوع سرعتی کمتر از  $u$  برابر با مقدار  $F(u) = n/N$  است. در این رابطه،  $N$  تعداد نقاط نمونه‌برداری شده و  $n$  تعداد دفعاتی است که نمونه انتخابی در ناحیه بین مرز کانال و خط هم‌سرعتی واقع می‌شود که سرعت روی آن  $u$  است. به عبارت دیگر (رابطه ۲۸):

$$F(u) = \frac{n}{N} = \frac{\xi}{\xi_{\max}} \quad (28)$$



شکل ۱- توزیع سرعت و سرعت ماکزیمم رخ داده زیر سطح آب (Chiu, 1988)

فاضلاب‌رو کوردن بلو<sup>۱</sup> فرانسه (Bonakdari *et al.*, 2008) استفاده شده است. علت انتخاب این داده‌ها اعتبار آن و مناسب بودن برای بحث در این مطالعه است. سایت میدانی کوردن بلو از شبکه فاضلاب شهر نانت واقع در شمال غربی فرانسه، داده‌های موردنیاز را برای صحت‌سنجی مدل پیشنهادی به‌طور کامل تأمین کرده است. مطابق شکل ۲، مقطع عرضی کانال مذکور مرکب و تنگ است ( $1/7 < y/z < 2/6$ ) که تخم‌مرغی شکل و دارای یک سکو<sup>۲</sup> است. در این شکل، محور افقی ( $y$ ) و محور قائم ( $z$ ) نشان داده شده است.

جریان آشفته و زیربحرانی، با عدد رینولدز بزرگتر از  $10^5$  و عدد فرود بین  $0/2$  و  $0/3$  برای تمام شرایط هیدرولیکی یکسان است. همچنین، شیب طولی برابر  $0/004$ ، ضریب زبری مانینگ برابر  $0/014$  و عمق حداکثر کانال ( $D$ )  $2/86$  متر است. ابزار اندازه‌گیری سرعت که در آزمایشگاه راه و پل فرانسه (LCPC) طراحی و ساخته شده است سربر<sup>۳</sup> نامیده می‌شود (شکل ۲). این وسیله، سرعت را در دو بعد اندازه‌گیری می‌کند و از راه دور عملکرد آن قابل کنترل است (Larrarte, 2006). علاوه بر این، پنج سرعت‌سنج صوتی داپلر می‌تواند روی این وسیله نصب شود. فاصله عمودی این سرعت‌سنج‌ها از هم  $20$  سانتی‌متر است و می‌توانند سرعت جریان را به‌طور

بر اساس مطالعات مارینی و همکاران (Marini *et al.*, 2011)، یک تابع توزیع تجمعی تحت سیستم مختصات  $x-y$  پیشنهاد شده است. در تابع پیشنهادی، توزیع سرعت متقارن است و محل وقوع سرعت حداکثر در  $y = y_0$  در نظر گرفته شده است. با چنین فرضیاتی، تابع توزیع تجمعی به‌صورت رابطه ۳۱ پیشنهاد شده است:

$$F(u) = \left[ 1 - \left( \frac{2x}{B} \right)^2 \right]^{H/B} \times 4 \times \left[ \left( \frac{y}{2H} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln(y_0/H)}} - \left( \frac{y}{2H} \right)^{\frac{2 \ln 2}{\ln 2 - \ln(y_0/H)}} \right] \quad (31)$$

که در آن،  $B$  = عرض؛  $H$  = عمق جریان،  $y = y_0$  = محل وقوع سرعت حداکثر؛  $y$  = فاصله جریان در جهت قائم؛ و  $x$  = فاصله جریان در جهت مقطع عرضی.

## نتایج و بحث

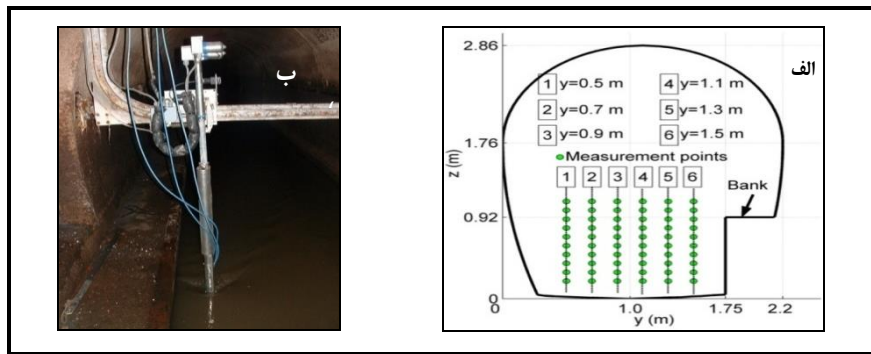
برآورد نیمرخ توزیع سرعت در کانال فاضلاب‌رو کوردن بلو بر مبنای توابع توزیع تجمعی چیو و مارینی به‌منظور اعتبارسنجی مدل پیشنهادی برآورد توزیع سرعت و همچنین مقایسه نتایج با مدل پیشنهادی (آنتروپی شانون)، از داده‌های میدانی کانال مرکب



برآورد توزیع سرعت در کانال‌های مرکب...

مقطع عرضی کانال پوشش داده شود. به علاوه، با توجه به تغییرات تراز آب داخل فاضلاب‌رو، تعداد نقاط اندازه‌گیری می‌تواند در امتداد قائم تغییر کند.

همزمان در ۵ نقطه روی یک خط عمودی در مقطع اندازه‌گیری کنند. جابه‌جایی افقی و عمودی این وسیله به کمک ریل، در هر مقطع می‌تواند باعث شود که کل سطح



شکل ۲- کانال فاضلاب‌رو مرکب کوردن بلو

(الف) ابعاد و شکل شماتیک کانال مرکب فاضلاب‌رو و (ب) ابزار اندازه‌گیری سربر در حین کار

در جدول ۱، ضرایب در نظر گرفته شده برای رابطه توزیع سرعت پیشنهادی بیان شده است. در این جدول،  $D$  = عمق کانال؛  $B$  = عرض کانال؛  $m$  = عدد حقیقی رابطه توزیع سرعت پیشنهادی؛  $\lambda_1$  و  $\lambda_*$  = ضرایب لاگرانژ رابطه توزیع سرعت پیشنهادی؛  $u_{max}$  = سرعت حداکثر در رابطه توزیع سرعت چپو؛  $\bar{u}$  = سرعت متوسط در رابطه توزیع سرعت چپو؛  $\beta_i$  پارامتر تابع توزیع تجمعی (فاصله عرضی روی سطح آب بین محور  $y$  و سمت چپ یا راست مقطع عرضی کانال)؛ و  $Z$  مؤلفه سیستم مختصات در جهت عرضی است.

برای مقایسه نتایج برآورد توزیع سرعت با مقادیر سرعت مشاهداتی در کانال کوردن بلو، از شاخص‌های آماری RMSE و MAPE استفاده می‌شود که به صورت روابط ۳۲ و ۳۳ محاسبه می‌شوند.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_{i,measured} - u_{i,estimate})^2} \quad (32)$$

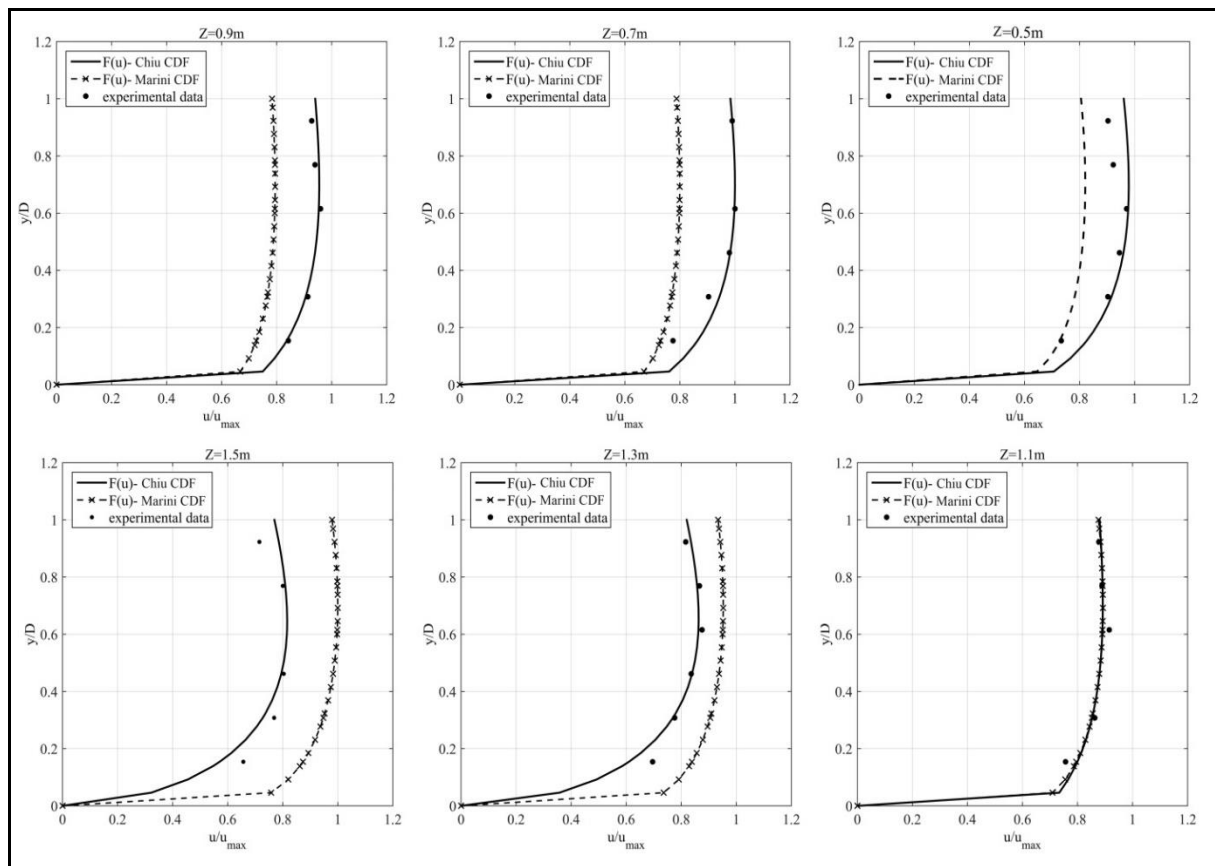
$$MAPE = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|u_{i,measured} - u_{i,estimate}|}{u_{i,measured}} \quad (33)$$

جدول ۱- پارامترهای توزیع سرعت و تابع چگالی احتمال

		$D=0.65m$		$D=0.91m$		$D=1.19m$	
		$\lambda_1$	$\lambda_*$	$\lambda_1$	$\lambda_*$	$\lambda_1$	$\lambda_*$
$m$	$k$	$u_{max} = 0.74m/s$		$u_{max} = 0.93m/s$		$u_{max} = 0.98m/s$	
		$\bar{u} = 0.71m/s$		$\bar{u} = 0.81m/s$		$\bar{u} = 0.85m/s$	
		$B = 1.62m$		$B = 1.65m$		$B = 2.14m$	
		$\beta_i = 1.7$		$\beta_i = 1.7$		$\beta_i = 1.7$	
		$z = 0.5-1.5m$		$z = 0.5-1.5m$		$z = 0.5-1.5m$	
2	2	20.14	-4.75	10.3	-2.64	9.18	-2.46

آزمایشگاهی، هم در ناحیه مرزی و هم در ناحیه مرکزی کانال، دارد و جوابگوی پدیده دیپ است. مدل مارینی فقط در ناحیه مرکزی ( $Z=1/1$  m) پیش‌بینی قابل قبولی نشان داده است؛ این مدل فقط برای پیش‌بینی سرعت در مرکز جوابگوست. اما با تغییر  $z$  (یعنی عرض کانال)، تأثیر زیادی بر منحنی‌های توزیع سرعت مشاهده می‌شود و مدل مارینی کارایی خود را از دست می‌دهد. همچنین، مدل مارینی در نمایش گرادیان منفی سرعت طولی در ناحیه مرزی کانال، در محل وقوع سرعت حداکثر ضعیف عمل می‌کند و در لایه مرزی دارای انحراف زیادی است. در ادامه، برای ترازهای بیشتر نیز نیمرخ سرعت محاسبه، رسم و تأثیر نسبت عرض به عمق ظاهر شده است.

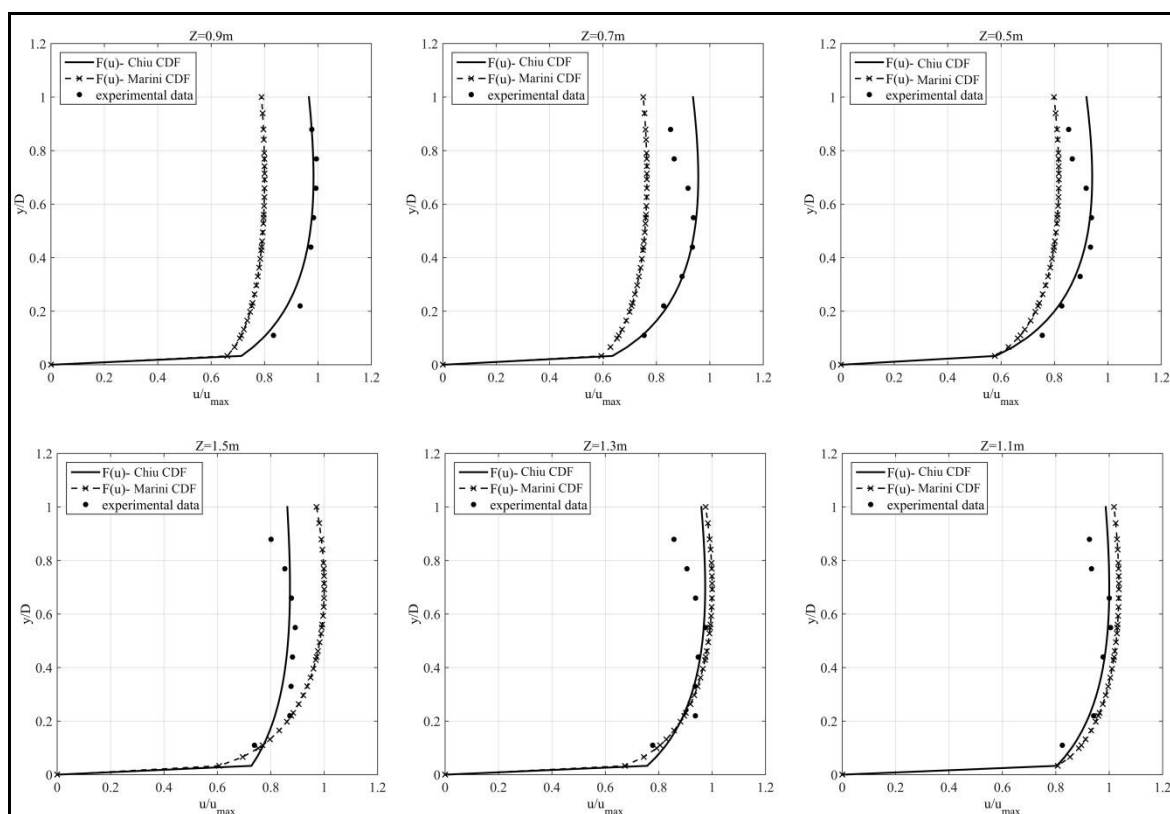
در شکل ۳، توزیع سرعت در سه عمق با شرایط تراز آب حداقل، متوسط و حداکثر اندازه‌گیری شده رسم شده است. در این شکل، نتایج برآورد توزیع سرعت طولی در امتداد عرضی کانال فاضلاب رو کوردن بلو در تراز  $0/65$  متری آب نشان داده شده است. باید دقت شود در عرض‌های مرکزی کانال هر دو مدل انطباق خوبی با داده‌های واقعی دارند. اما با دور شدن از مرکز کانال، میزان انحراف مدل مارینی بیشتر می‌شود و توزیع سرعت مدل پیشنهادی (تابع توزیع تجمعی چپو) بهتر عمل می‌کند. در این مقطع، عمق حداکثر  $0/65$  و عرض کانال  $1/61$  متر بوده است. بنابراین، نسبت عرض به عمق برابر  $2/48$  است که شرایط کانال تنگ را دارد. همان‌طور که در نمودارها مشخص است، مدل پیشنهادی تطابق بهتری با نتایج



شکل ۳- توزیع سرعت در عمق  $0/65$  متری برای تابع‌های توزیع تجمعی چپو و مارینی

بیشتر بیان شده است. مدل پیشنهادی همچنان بهترین انطباق را در هر دو ناحیه مرزی و مرکزی با نتایج اندازه‌گیری در فاصله کف کانال تا محل وقوع پدیده دیپ دارد. یادآوری می‌شود که اندک اختلاف بین نتایج داده‌های آزمایشگاهی، ناشی از تغییر تراز آب و تبدیل مقطع به مقطعی مرکب و بروز جریان‌های ثانویه و ممنوم ناشی از آنهاست. مدل مارینی فقط در ناحیه مرکزی ناشی از آنهاست. مدل مارینی فقط در ناحیه مرکزی دارای انحراف قابل توجهی می‌گردد.

شکل ۴ نتایج توزیع سرعت برای تغییرات عمق ۰ تا ۰/۹۱ متری را نشان می‌دهد. در این شکل، به دلیل اینکه عمق آب بیشتر شده است و شرایط کانال تنگ نمود بهتری می‌یابد، نیمرخ‌های رسم شده پدیده دیپ را بهتر نشان داده‌اند. در این عمق نیز، مدل چیبو در نزدیکی جداره کانال بهتر عمل می‌کند. در این تراز،  $D=0/91$  و  $b=1/65$  متر است و نسبت عرض به عمق برابر  $1/83$  می‌شود. باید توجه شود نسبت به حالت قبل، این نسبت کمتر شده است، کانال کم‌عرض‌تر و شرایط هیدرولیکی کانال تنگ



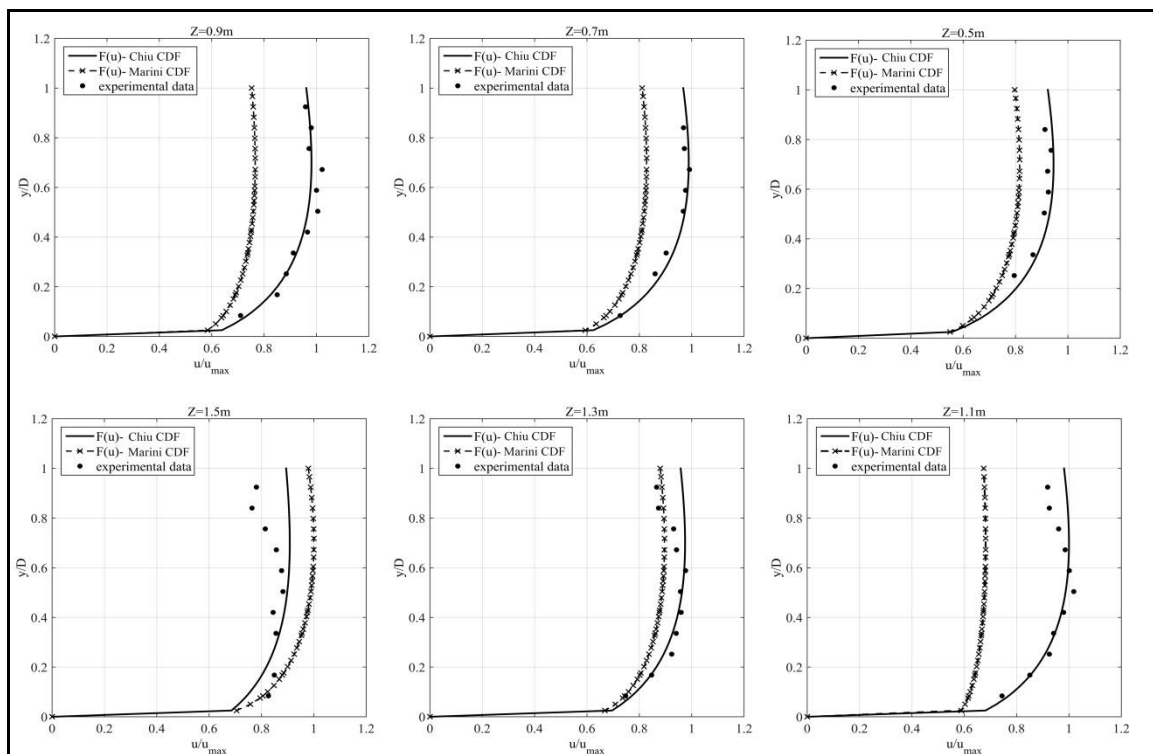
شکل ۴- توزیع سرعت در عمق ۰/۹۱ متری برای تابع‌های توزیع تجمعی چیبو و مارینی

بالای محل وقوع حداکثر مشخص است، به دلیل همین تبدیل مقطع و جریان‌های ثانویه ناشی از آن است. در این عمق  $D=1/19$ ،  $b=2/14$  است و در نتیجه نسبت عرض به عمق برابر  $1/798$  می‌شود که نسبت به دو حالت قبل کمتر و به این معناست که کانال تنگ‌تر شده است. این مسئله نشان می‌دهد که با کاهش نسبت عرض به

شکل ۵ توزیع سرعت را در حالتی نشان می‌دهد که مقطع جریان به مقطعی مرکب تبدیل شده است. همان‌طور که در این شکل مشخص است، وجود جریان‌های ثانویه در نواحی کناری کانال یعنی  $Z=1/5$  و  $Z=0/5$  متر به خوبی روی نیمرخ‌های سرعت دیده می‌شود. انحنای معکوسی که در مقادیر اندازه‌گیری شده در قسمت

بیشترین خطاها را خواهیم داشت که این مسئله همان‌طور که گفته شد ناشی از تبدیل مقطع به مقطعی مرکب و بروز نوساناتی در جریان است که بر اثر جریان‌های ثانویه قوی در این حالت ایجاد می‌شود.

عمق، پدیده دیپ نمایان‌تر شده است. در این تراز م ی‌توان دید که مدل چپو نیز به خوبی در ناحیه مرکزی و مرزی با داده‌های میدانی تطابق دارد. اما همچنان مدل مارینی فقط در ناحیه ( $Z=1/3$ ) با داده‌ها انطباق مناسبی دارد. یادآوری می‌شود که برای تراز ۱/۱۹ متری،



شکل ۵- توزیع سرعت در عمق ۱/۱۹ متری برای تابع‌های توزیع تجمعی چپو و مارینی

دیپ است. تحلیل‌های مبتنی بر تئوری آنتروپی بیانگر تأثیر تابع توزیع تجمعی بر منحنی‌های توزیع سرعت است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، مدل پیشنهادی توسط تابع تجمعی مارینی دارای پارامتر کمتر و سهولت بیشتر در حجم محاسبات است. اما این مدل در کانال فاضلاب‌رو در تمامی عرض‌ها دقت قابل قبول ندارد و در ناحیه مرکزی کانال محل وقوع سرعت حداکثر را پیش‌بینی نمی‌کند. سرانجام اینکه از تابع توزیع تجمعی آنتروپی می‌توان به‌عنوان معیاری برای مقایسه تغییرات جریان کانال روباز استفاده کرد.

در ادامه، نتایج پیش‌بینی سرعت در مقطع کانال فاضلاب‌رو تنگ، به‌صورت کمی بررسی خواهد شد. با محاسبه خطاها مشاهده می‌شود، مدل پیشنهادی (تابع توزیع تجمعی چپو) در هر دو شاخص آماری فوق دارای کمترین خطا است. حداکثر RMSE در مدل چپو و مارینی به‌ترتیب برابر ۰/۰۷۵۸، ۰/۹۵۶ در  $Z=1/5$  متر است. همچنین، حداکثر خطای نسبی در مدل چپو و مارینی به‌ترتیب برابر ۱۹ و ۵۳ درصد در  $Z=1/5$  متر است. میزان خطا در محل وقوع سرعت حداکثر در مدل چپو کمترین است که نشان‌دهنده دقت بالای مدل تابع توزیع تجمعی پیشنهادی در پیش‌بینی محل وقوع پدیده

## مقایسه نتایج مدل پیشنهادی توزیع سرعت با مدل توزیع سرعت چيو

در این بخش، نتایج توزیع سرعت در کانال فاضلابرو تنگ بر اساس مدل پیشنهادی با مدل توزیع سرعت چيو مقایسه شده است. مدل چيو (Chui, 1988) بر مبنای مفهوم آنتروپی شانون برای توصیف توزیع سرعت دوبعدی در مقاطع عرضی جریان به دست آمده است (رابطه ۳۴).

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{1}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right] \quad (34)$$

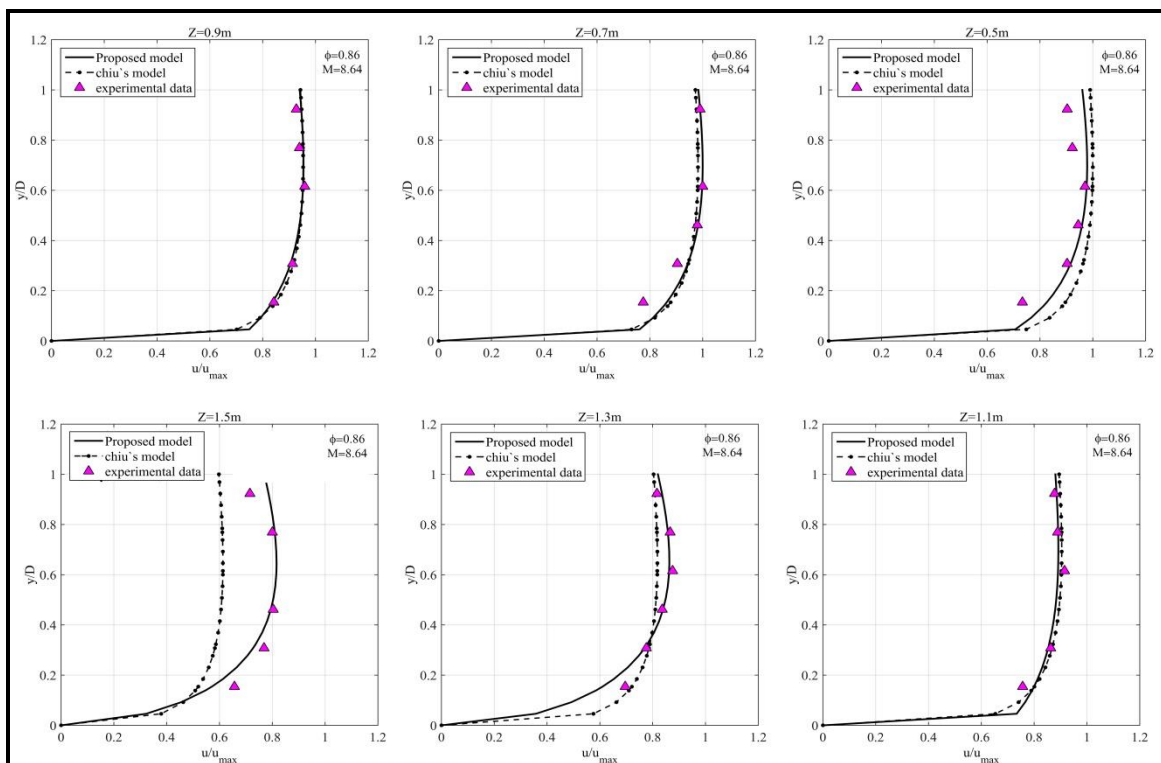
که در آن،

$M = \lambda_2 u_{\max}$  پارامتر بی‌بعد آنتروپی شانون؛ و

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \phi$$

نیمرخ‌های سرعت اولیه محلی، همراه با مقاطع عرضی بی‌بعد شده با سرعت حداکثر  $u_{\max}$  برای سطوح آب پایین، متوسط و بالا در کانال کوردن بلو در شکل‌های

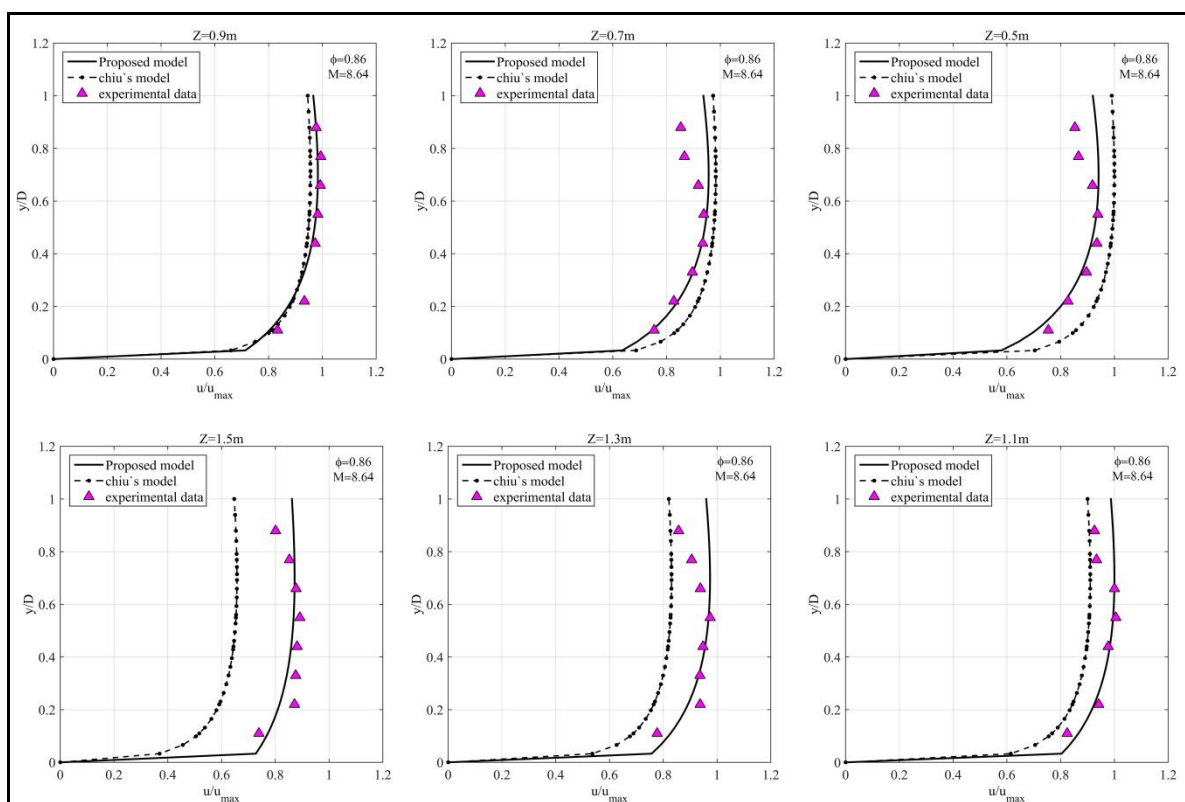
۶ تا ۸ محاسبه و رسم شده است. در شکل ۶، نیمرخ‌های سرعت به دست آمده با مدل پیشنهادی و مدل ارائه شده چيو بر اساس آنتروپی شانون در تراز ۰/۶۵ متری کانال فاضلابرو کوردن بلو نشان داده شده است. در این شکل مدل پیشنهادی، پدیده دیپ و گرادایان منفی سرعت را در ناحیه فوقانی محل وقوع حداکثر به خوبی پیش‌بینی کرده است. مدل چيو در نواحی مرکزی نسبتاً خوب عمل کرده و گرادایان منفی را به درستی نشان داده است. ناحیه مرزی ( $Z=1/5$  متر) اختلاف زیادی با داده‌های میدانی وجود دارد و انحنای زیادی نشان می‌دهد. محل وقوع سرعت حداکثر در تمام  $Z$ ها در  $y=0/4$  متر رخ داده است. با توجه بیشتر به تغییرات جریان در جهت قائم، مشاهده می‌شود که مدل پیشنهادی به شکلی چشمگیر با تغییرات فاصله عرضی  $Z$  در نواحی مرزی خوب عمل می‌کند.



شکل ۶- توزیع سرعت برای تراز ۰/۶۵ متری بر اساس مدل پیشنهادی و مقایسه با نتایج اندازه‌گیری شده در کانال فاضلابرو کوردن بلو و مدل چيو

به‌خوبی قابل پیش‌بینی است. مدل چپو نیز انطباق نسبتاً خوبی را نشان می‌دهد ولی میزان انحنای زیادی در  $Z=1/3$  و  $Z=1/5$  متر مشاهده می‌گردد. وقوع سرعت حداکثر در تمامی  $Z$ ها در  $y=0/5$  متر دیده می‌شود که نسبت به عمق  $D=0/65$  متر، در تراز نسبتاً پایین‌تری قرار گرفته است. روشن است که در  $Z=1/1$  متر، سرعت حداکثر زیر سطح آزاد آب قرار گرفته است.

شکل ۷، توزیع سرعت طولی را در امتداد عرضی کانال در تراز  $0/91$  متری، نمایش می‌دهد. در این حالت، به‌دلیل بیشتر بودن عمق آب، شرایط تعریف شده برای کانال تنگ بهتر نمایان است (یعنی نسبت عرض به عمق کاهش می‌یابد). همان‌طور که در این شکل مشخص است، برای مدل پیشنهادی بهترین انطباق در نواحی مختلف کانال با داده‌های آزمایشگاهی وجود دارد و پدیده دیپ نیز



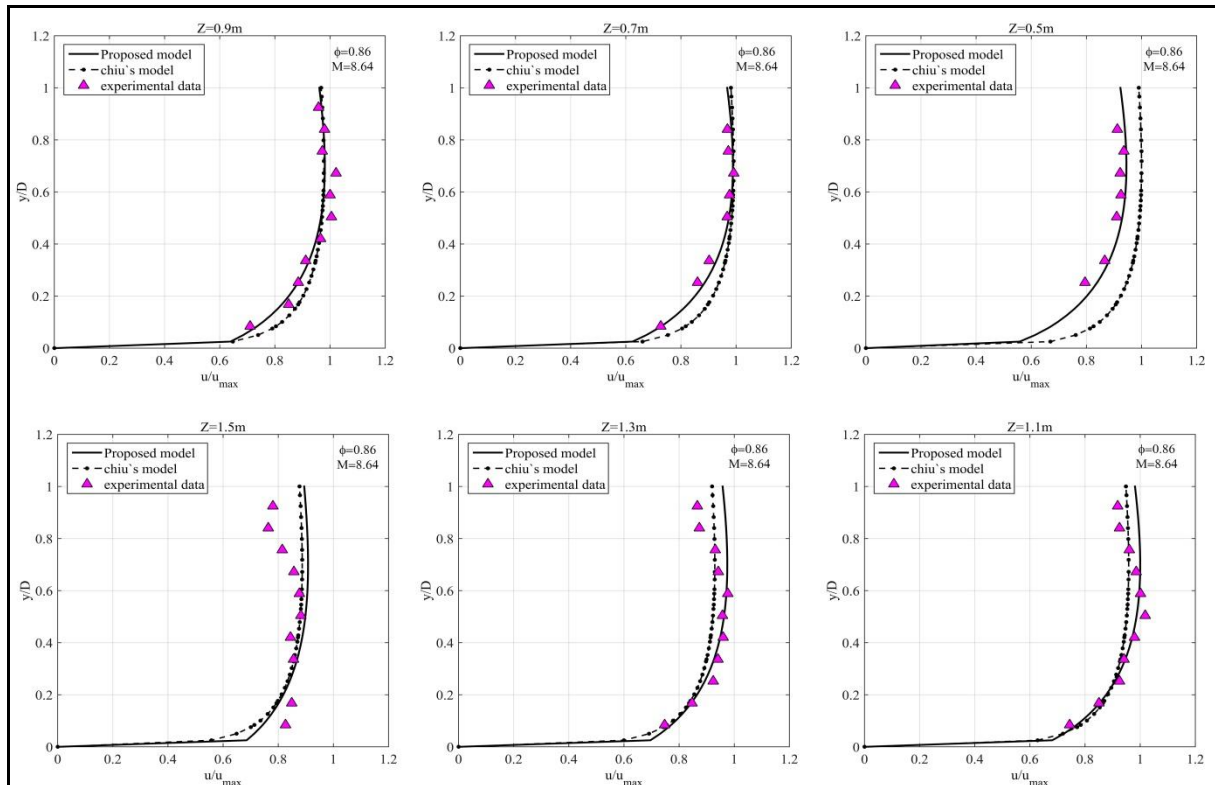
شکل ۷- توزیع سرعت برای تراز  $0/91$  متری بر اساس مدل پیشنهادی و مقایسه با نتایج اندازه‌گیری شده در کانال فاضلاب رو کوردن بلو و مدل چپو

گرادیان شدید بین سطح بالای سکو و کانال اصلی وجود دارد. در این عمق، میزان پایین رفتن محل وقوع سرعت حداکثر افزایش یافته است و این امر ناشی از افزایش نسبت عرض به عمق و اثر آن بر توزیع سرعت طولی است. جریان‌های ثانویه تشکیل شده در ناحیه سکوی کناری بر توزیع سرعت در داخل مقطع اصلی کانال نیز تأثیر گذاشته

شکل ۸، توزیع سرعت طولی در امتداد عرضی کانال را در تراز  $1/19$  متری نمایش می‌دهد. محل وقوع سرعت حداکثر در  $Z=0/5$ ,  $Z=0/7$ ,  $Z=0/9$  متر و در  $Z=1/1$ ,  $Z=1/3$ ,  $Z=1/5$  متر مشاهده می‌شود که تطابق نداشتن محل وقوع پدیده دیپ به‌دلیل وجود سکوست. می‌توان نتیجه گرفت که یک

برآورد توزیع سرعت در کانال‌های مرکب...

است. در این عمق، با وجود تمام مسائل گفته شده، مدل پیشنهادی و مدل چيو به خوبی توزیع سرعت را در نواحی مرکزی و کناری نشان داده‌اند. تنها اختلاف برای  $Z=0/5$  متر مشاهده می‌شود که مدل پیشنهادی بهتر از مدل چيو عمل کرده است.



شکل ۸- توزیع سرعت برای تراز ۱/۱۹ متری بر اساس مدل پیشنهادی و مقایسه با نتایج اندازه‌گیری شده در کانال فاضلابرو کوردن بلو و مدل چيو

میزان حداکثر خطای مدل چيو ۲۶/۳۳ درصد است. نتایج این بررسی، مدل پیشنهادی جدیدی در برآورد توزیع سرعت در کانال‌های فاضلابرو ارائه داده است. بر مبنای مدل آنتروپی تسالیس، برآورد نیمرخ سرعت در کانال فاضلابرو تنگ اعمال شده است. خطای نسبی سرعت محاسبه شده با مدل جدید پیشنهادی، در بازه‌ای بین ۱ تا ۷ درصد قرار گرفته که این میزان خطا نشان‌دهنده دقت مناسب است. خصوصاً نزدیک محل وقوع سرعت حداکثر، میزان این خطا به ۲ تا ۴ درصد محدود می‌شود که نشان‌دهنده توانایی مدل برای پیش‌بینی پدیده دیپ است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی در برآورد

با توجه به محاسبات می‌توان دریافت که سرعت حداکثر در مرکز کانال، در قسمت اصلی کانال رخ می‌دهد و بهترین انطباق نیمرخ سرعت در تمامی نواحی مشاهده می‌شود. برای ارزیابی دقت مدل، از مجذور میانگین مربعات خطا (RMSE) و متوسط خطاهای نسبی مطلق (MAPE) استفاده شده است. با توجه به محاسبات میزان خطاهای RMSE نشان می‌دهد که مدل پیشنهاد شده در تمامی عمق‌ها خصوصاً عمق‌های نزدیک به سطح آب و پیش‌بینی محل دقیق وقوع سرعت حداکثر، دقت بالایی دارد. مدل پیشنهادی قادر به پیش‌بینی نتایج آزمایشگاهی با خطای نسبی حداکثر ۷/۸۴ درصد است. در حالی که

تعداد زیاد پارامترهای مدل چپو، این مدل جوابگوی تمامی موضوعات مورد بررسی است و توزیع سرعت را به صورت دقیق پیش‌بینی کرده است. در مرحله صحت‌سنجی، نتایج مدل پیشنهادی با داده‌های میدانی با معیارهای RMSE و MAPE مقایسه شده و مقادیر معیارهای مذکور به ترتیب در بازه ۰/۰۱۲ تا ۰/۰۷۵۸ و ۱ تا ۷ درصد قرار گرفته است. گفتنی است که مقادیر RMSE برای مدل‌های مارینی و چپو به ترتیب برابر ۰/۱۱ و ۰/۱۴۳ و ۰/۱۱۷۱ و ۰/۲۲۶ و مقادیر MAPE نیز برای این مدل‌ها به ترتیب برابر ۱۰ تا ۱۵ و ۱/۱۰۳ تا ۲۶/۳۳۸ درصد است. همچنین، مدل پیشنهادی با وجود شکل هندسی پیچیده در مقطع عرضی کانال‌های فاضلاب‌رو مرکب واقعی در بیشتر موارد قادر است نیمرخ سرعت را در جهت‌های قائم و عرضی به درستی پیش‌بینی کند. مقایسه مدل پیشنهادی بر اساس آنتروپی تسالیس با آنتروپی شانون نشان از سادگی آنتروپی تسالیس و نداشتن محدودیت‌ها و سرانجام عملکرد بهتر آن دارد.

سرعت علاوه بر اینکه عملکرد بهتری نسبت به مدل چپو دارد، انطباقی بسیار عالی نیز با توزیع سرعت قائم در سطوح مختلف آب داراست.

### نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت نیمرخ توزیع سرعت در جریان‌های روباز و ارتباط آن با پارامترهای مهم هیدرولیکی مانند دبی، تنش برشی و انتقال رسوب، ارائه مدل‌های ریاضی منطبق با واقعیت در برآورد نیمرخ سرعت اهمیتی ویژه دارد. در این بررسی، مدلی به منظور برآورد نیمرخ سرعت در کانال مرکب فاضلاب‌رو ارائه شده و نتایج به دست آمده از داده‌های میدانی کانال کوردن بلو صحت‌سنجی شده است. تحلیل‌ها بر مبنای تئوری آنتروپی بوده و تأثیر تابع توزیع تجمعی بر منحنی‌های توزیع سرعت ارزیابی شده است. گفتنی است که مدل مارینی پارامترهای کمتر و محاسبات ساده‌تری دارد ولی با محدودیت‌هایی روبه‌روست. این مدل در ناحیه مرکزی کانال، در پیش‌بینی محل وقوع سرعت حداکثر، ضعیف عمل کرده است. همچنین، با وجود

### قدردانی

این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی اجرا شده در دانشگاه مراغه (با شماره قرارداد: ۹۴/د/۱۶۱۹) است و از زحمات همکاران بخش پژوهش قدردانی می‌شود.

### مراجع

- Barbe, D. E. 1990. Probabilistic analysis of bridge scour using the principle of maximum entropy. Ph. D. Thesis. Louisiana State University, Baton Rouge.
- Bonakdari, H. 2011. Entropy and its application in computation of velocity distribution in sewers. Proceeding of the World Environmental and Water Resources Congress: Bearing Knowledge for Sustainability. California, United States.
- Bonakdari, H. and Moazamnia, M. 2015. Modeling of velocity fields by the entropy concept in narrow open channels. KSCE J. Civil Eng. 19(3): 779-789.
- Bonakdari, H., Larrarte, F., Lassabatere, L. and Joannis, C. 2008. Turbulent velocity profile in fully-developed open channel flows. Environ. Fluid Mech. 8(1): 1-17.
- Chiu, C. L. 1987. Entropy and probability concepts in hydraulics. J. Hydraul. Eng. 113(5): 583-600.



- Chiu, C. L. 1988. Entropy and 2-D velocity distribution in open channels. *J. Hydraul. Eng.* 114(7): 738-756.
- Chiu, C. L. 1989. Velocity distribution in open channel flow. *J. Hydraul. Eng.* 115(5): 576-594.
- Chiu, C. L. 1991. Application of entropy concept in open-channel flow. *J. Hydraul. Eng.* 117(5): 615-628.
- Chiu, C. L. and Chiou, J. 1986. Structure of 3-D flow in rectangular open channels. *J. Hydraul. Eng.* 109(11): 1050-1068.
- Chiu, C. L. and Lin, G. F. 1983. Computation of 3-D flow and shear in open channels. *J. Hydraul. Eng.* 112(11): 1424-1440.
- Cui, H. 2011. Estimation of velocity distribution and suspended sediment discharge in open channels using entropy. M. Sc. Thesis. Texas A&M University, College Station, TX.
- Cui, H. and Singh, V. P. 2012. On the cumulative distribution function for entropy-based hydrologic modeling. *T- ASABE.* 55(2): 429-438.
- Esmaeili-Varaki, M., Ghorbani-Nasralah-Abadi, S. and Navabian, M. 2013. Evaluation of entropy based chiu's method for prediction of the velocity distribution and discharge in rivers. *J. Water Soil Conserv.* 20(6): 147-164. (in Persian)
- Farsadizadeh, D., Hosseinzadeh Dalir, A., Ghorbani, M. A. and Samadian-Fard, S. 2011. Estimation of flow velocity distribution in smooth-bed open channels with a smooth bed using entropy theory and genetic programming. *Water Soil Sci. (Agr. Sci.).* 21(3): 61-74 (in Persian)
- Guo, J. and Julien, P. Y. 2006. Application of modified log-wake law in open-channels. *Proceeding of the World Environmental and Water Resource Congress: Examining the Confluence of Environmental and Water Concerns.* May 21-25. Omaha, Nebraska, United States.
- Jaynes, E. T. 1957. Information theory and statistical mechanics 2. *Phys. Rev.* 108(2): 171-190.
- Larrarte, F. 2006. Velocity fields within sewers: An experimental study. *Flow Measure. Instrum.* 17(5): 282-290.
- Luo, H. 2009. Tsallis entropy based velocity distributions in open channel flows. M. Sc. Thesis, Texas A&M University. College Station, TX.
- Luo, H. and Singh, V. P. 2011. Entropy theory for two-dimensional velocity distribution. *J. Hydrol. Eng.* 18(2): 331-339.
- Marini, G., De Martino, G., Fontana, N., Fiorentino, M. and Singh, V. P. 2011. Entropy approach for 2D velocity distribution in open-channel flow. *J. Hydraul. Res.* 49(6): 784-790.
- Moazamnia, M. and Bonakdari, H. 2014. Velocity distribution and estimation of discharge in sewers by shannon entropy concept. *Bimonthly J. Water Wastewater.* 25(2): 26-35. (in Persian)
- Shannon, C. E. 1948. A mathematical theory of communication. *At. & T. Tech. J.* 27(3): 379-423.
- Tsallis, C. 1988. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.* 52(1-2): 479-487.

## **Estimating the Velocity Distribution in Narrow Combined Sewers using Entropy Theory**

**R. Daneshfaraz\*, M. Moazamnia and S. Sadeghfam**

\* Corresponding Author: Associate Professor, Civil Engineering Department, Faculty of Engineering, University of Maragheh, Maragheh, Iran. Email: daneshfaraz@yahoo.com

Received: 12 January 2017, Accepted: 2 December 2017

Estimation of flow velocity distribution is considered to be one of the main issues in the open channels, sewers, and rivers. Occurrence of the maximum velocity phenomenon below free surface (Dip phenomenon), is cause of concern and complexity for estimation of the velocity distribution in open channel flows. In this paper, the velocity distribution in the narrow sewer combined channels was estimated using the entropy theory, and the impact of different cumulative distribution functions on the velocity distribution has been investigated. Accuracy evaluation of Marini and Chiu entropy functions in the estimation of the velocity distribution and parameters suggested that a new model with higher accuracy can be proposed in order to optimize the velocity estimation in these types of channels. Also, the comparison between field data of former studies and the result of proposed model indicated that the proposed model is in accordance with field data in the different levels and depths of channel. The results also showed acceptable accuracy of the proposed model in the velocity distribution estimation ( $R^2=0.86$ , relative error = 11%, MAPE = 7.84% and RMSE = 0.0758). Further, comparison of proposed model and Chiu velocity distribution model shows that the proposed model has better performance in spite of more simplicities than other existing models.

**Keywords:** Dip Phenomenon, Entropy Theory, Narrow Sewer, Velocity Distribution